

1.6.2 Zwei Kugeln mit Feder

1 Motivation

Dieses Experiment demonstriert die Erhaltung des Impulses im abgeschlossenen System. Es entspricht dem Zerfall eines Atomkerns oder eines Elementarteilchens, mit dem Unterschied, dass bei den erwähnten Zerfällen im allgemeinen relativistisch gerechnet werden muss.

2 Theorie

Der Impuls $\mathbf{p}$ eines Systems von Massenpunkten in einem abgeschlossenen System ist eine Erhaltungsgrösse:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Eine Änderung des Impulses ist nur möglich, falls äussere Kräfte $\mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$ auf das System einwirken:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \quad (2)$$

Da die Impulserhaltung das grundlegende physikalische Phänomen ist, folgt umgekehrt daraus die Definition der Kraft als zeitlicher Änderung des Impulses.

3 Experiment

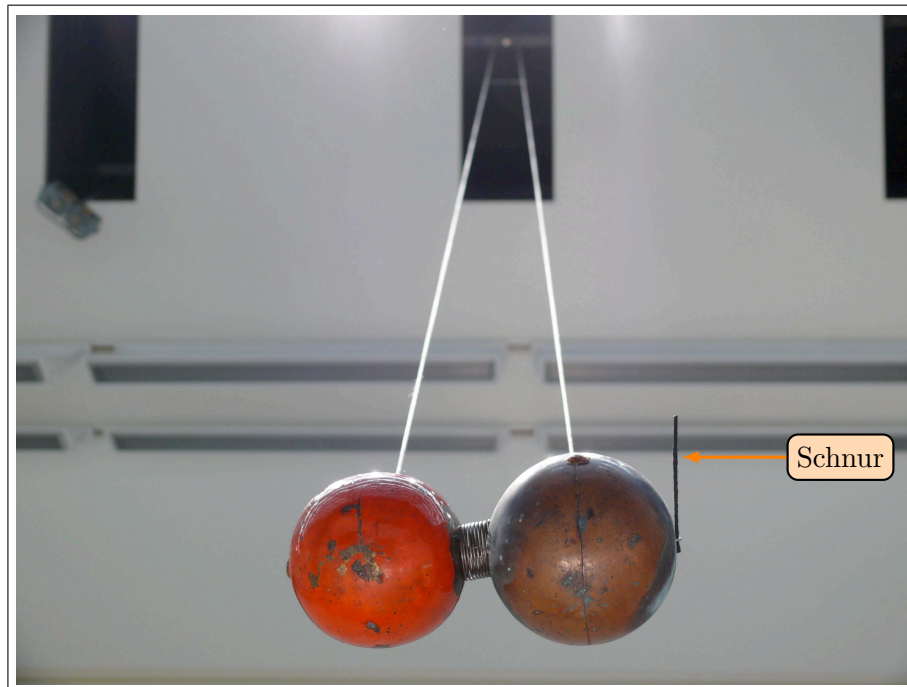


Abbildung 1: Zwei Kugeln mit Feder: Blick nach oben. Die Feder ist durch die Schnur rechts arretiert.

Zwei an langen Fäden hängende Kugeln der Masse m_1 und m_2 sind durch eine gespannte Feder gekoppelt und mit einer Schnur arretiert (siehe Abb. 1).

Die äusseren Kräfte sind die Gewichtskräfte und die Fadenkräfte der Aufhängung und kompensieren sich, so dass das System in Ruhe ist (siehe Abb. 2).

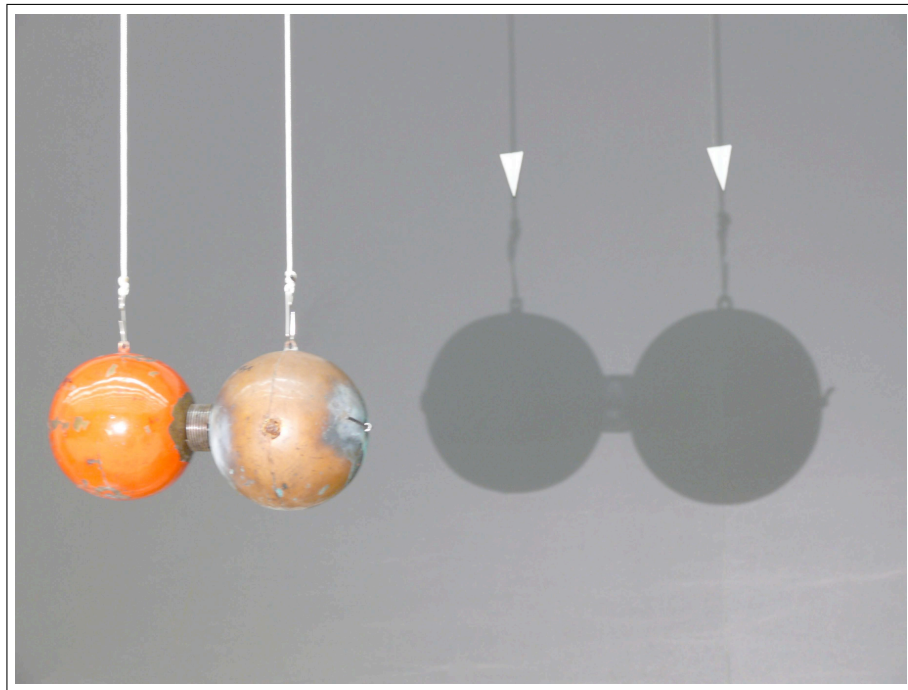


Abbildung 2: Zwei Kugeln mit Feder: Markierung der Ruhelage.

Wird nun die Arretierung gelöst, dann fahren die Kugeln auseinander und werden, je nach dem Verhältnis m_2/m_1 ihrer Massen unterschiedlich ausgelenkt. Diese Auslenkungen x_1 und x_2 leiten wir im Folgenden aus dem Impuls- und dem Energiesatz her.

Vor dem Auslösen gilt:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nach dem Auslösen gilt wegen der Impulserhaltung:

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}'_1 := \begin{pmatrix} p' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{p}'_2 \quad (5)$$

Für die Herleitung der Auslenkung benötigen wir noch den Energiesatz. Wir bezeichnen die in der Feder gespeicherte Energie mit Q . Dann gilt:

$$Q = \frac{\mathbf{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2'^2}{2m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} \cdot p'^2 \quad (6)$$

$$\Rightarrow p'^2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot Q \quad (7)$$

Die Energien der beiden Kugeln sind damit:

$$E_1 = \frac{p'^2}{2m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot Q \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot Q \quad (8)$$

Für jede der beiden Kugeln ergibt sich eine Pendelbewegung, wobei sich die maximale Auslenkung um den Winkel α_1 bzw. α_2 aus den jeweils zur Verfügung stehende Energie ergibt. Dort gilt:

$$m_1 g h_1 = E_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot Q \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{m_2 Q}{m_1 (m_1 + m_2)} \quad (9)$$

und entsprechend

$$h_2 = \frac{m_1 Q}{m_2 (m_1 + m_2)}, \quad (10)$$

wobei h_1 und h_2 die maximale vertikale Auslenkung bedeuten (siehe Abb. 3).

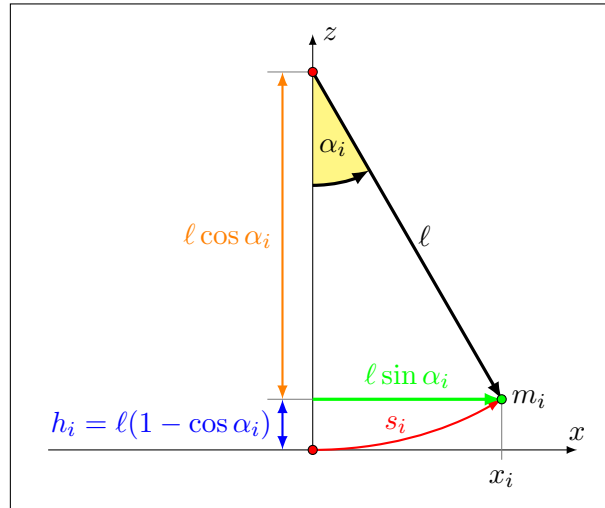


Abbildung 3: Maximale horizontale Auslenkung x_i und maximale Höhe h_i der Masse m_i .

Für die Maximalhöhen h_i und die maximalen horizontalen Auslenkungen x_i ergibt sich gemäss Abb. 3:

$$x_i = l \sin \alpha_i \quad (11)$$

$$h_i = l (1 - \cos \alpha_i) \quad (12)$$

Da die Fäden der Aufhängung sehr lang sind, gilt $\alpha_i \ll 1$, so dass wir in guter Näherung x_i und h_i bis zur 2. Ordnung in α_i entwickeln können:

$$x_i \approx \ell \alpha_i \quad (13)$$

$$h_i \approx \frac{1}{2} \ell \alpha_i^2 \quad (14)$$

Aus Gln. (9), (10) und (14) folgt schliesslich:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \quad (15)$$

Daraus folgt schliesslich für das Verhältnis der horizontalen Auslenkungen:

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}} \quad (16)$$

Im Experiment werden einmal zwei Kugeln gleicher Masse verwendet, so dass die Auslenkungen gleich gross sind, und das andere Mal zwei Kugeln im Massenverhältnis 1 : 2. In jenem Fall wird die leichtere Kugel doppelt so weit wie die schwerere ausgelenkt.